Devoir maison n° 8 - Correction

Exercice 1. (*E3A PC 2020*)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q1. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

- On commence par déterminer les valeurs propres de M_a.

$$\chi_{M_a}(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \overset{\text{dvp } C_1}{=} (X-1)\begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) \overset{\text{id. rem.}}{=} (X-1)^2(X+1).$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(M_a) = \{-1, 1\} \text{ avec } m_{-1} = 1 \text{ et } m_1 = 2}$.

- D'après le cours, on a $1 \leqslant \dim(E_{-1}) \leqslant m_{-1} = 1$ donc on est assuré d'avoir $\dim(E_{-1}) = 1$. Ensuite,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff M_a X = X \iff \begin{cases} x + ay = x \\ z = y \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} ay = 0 \\ y = z \end{cases}$$

On distingue donc deux cas :

– Si $a = 0$, on a juste $y = z$ donc un élément de E_1 est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ z \\ z \end{pmatrix}$, d'où $E_1 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et en particulier $\dim(E_1) = 2$.

– Si $a \neq 0$, le système précédent donne $y = 0$ et $z = y = 0$, d'où $E_1 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ et en particulier $\dim(E_1) = 1$.

Ainsi, si $a = 0$, on a $\dim(E_{-1}) + \dim(E_1) = 3$ (la taille de la matrice) donc M_a est diagonalisable. En revanche, si $a \neq 0$, on a $\dim(E_{-1}) + \dim(E_1) = 2 \neq 3$ donc M_a n'est pas diagonalisable.
En conclusion, $\boxed{M_a \text{ est diagonalisable si et seulement si } a = 0}$.

Q2. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

D'après la question précédente, on remarque que 0 n'est jamais valeur propre de M_a donc $\boxed{M_a \text{ est inversible pour tout réel } a}$.

Q3. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Idée : il s'agit de trigonaliser la matrice M_a.
D'après la première question, on est dans le cas où $a \neq 0$. On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_a.

On cherche une base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_a) = T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que

$\begin{cases} f_a(u_1) = -u_1 \\ f_a(u_2) = u_2 \\ f_a(u_3) = u_2 + u_3 \end{cases}$. En particulier u_1 est un vecteur propre pour la valeur propre -1, et u_2 un vecteur

propre pour la valeur propre 1. D'après **Q1**, on peut prendre $u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. En résolvant $M_aX = -X$, on trouve que $u_1 = \begin{pmatrix}-a/2\\1\\-1\end{pmatrix}$ convient.
Enfin, on résout $M_aX = u_2 + X$ qui équivaut à

$$\begin{cases} x + ay = 1 + x \\ z = 0 + y \\ y = 0 + z \end{cases} \iff \begin{cases} ay = 1 \\ z = y \end{cases} \overset{a\neq 0}{\iff} \begin{cases} y = 1/a \\ z = 1/a \end{cases}$$

donc on peut prendre $u_3 = \begin{pmatrix}0\\1/a\\1/a\end{pmatrix}$ (on veut juste une solution, on ne les cherche pas toutes).
On pose donc $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}-a/2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1/a\\1/a\end{pmatrix}\right)$. On vérifie que cette famille est libre (démonstration classique sans difficulté) et comme elle contient $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Finalement, M_a et T représentent le même endomorphisme f_a dans deux bases donc $\boxed{\text{ces deux matrices sont semblables}}$.

Exercice 2. Endomorphisme cyclique (*d'après CCINP PC 2023*)
Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \qquad f^1 = f, \qquad f^2 = f \circ f, \qquad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille

$$(v,\, f(v),\, \ldots,\, f^{n-1}(v))$$

soit une base de l'espace vectoriel E.

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (4x - 2y,\, x + y).$$

Q1. En considérant $v = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

Dans cette partie, $n = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
On calcule $f(v) = f(1,0) = (4,1)$. Comme ce vecteur est non colinéaire à $(1,0)$, la famille $(v, f(v))$ est libre et, puisqu'elle contient $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, c'est une base de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, $\boxed{f \text{ est cyclique}}$.

Q2. Déterminer les valeurs propres de f.

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\chi_f = \chi_M = \det(X\mathrm{I}_2 - M) = (X-4)(X-1) - (-1) \times 2 = X^2 - 5X + 6 = (X-3)(X-2)$ et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{2,3\}}$.

Q3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

En prenant pour $\boxed{w \text{ un vecteur propre de } f}$ associé à la valeur propre 2 (3 fonctionnerait tout aussi bien), on a $f(w) = 2w$ donc la famille $(w, f(w))$ est liée. En particulier, cette famille n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Q4. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Par produit matriciel, il vient $M^2 = M + 2\mathrm{I}_3$, ce qui est la traduction matricielle de la relation $\boxed{g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}}$.

Q5. En déduire que g est diagonalisable et préciser les valeurs propres de g sans calculer son polynôme caractéristique.

- D'après la question précédente le polynôme $P = X^2 - X - 2$ annule g. Comme $P = (X+1)(X-2)$ est scindé à racines simples, on en déduit que $\boxed{g \text{ est diagonalisable}}$.

- Comme les valeurs propres se trouvent parmi les racines d'un polynôme annulateur, on a $\mathrm{Sp}(g) \subset \{-1, 2\}$: $(*)$.

Méthode 1 : On résout $MX = -X$ et $MX = 2X$ (systèmes comme d'habitude), on trouve des solutions non nulles et en particulier -1 et 2 sont effectivement valeurs propres, d'où $\boxed{\mathrm{Sp}(g) = \{-1, 2\}}$. Au passage, on a les sous-espaces propres même s'ils ne sont pas demandés.

Méthode 2 : Comme g est diagonalisable, elle admet au moins une valeur propre. Supposons par l'absurde que g admette une unique valeur propre λ (avec soit $\lambda = -1$ soit $\lambda = 2$). Il existe alors $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P\lambda\mathrm{I}_3P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda\mathrm{I}_3$, ce qui est manifestement faux. Par conséquent g ne peut pas admettre une unique valeur propre et d'après l'inclusion $(*)$, on obtient $\boxed{\mathrm{Sp}(g) = \{-1, 2\}}$.

Remarque : on pouvait aussi remarquer que M est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. En revanche cela ne nous aide en rien pour les valeurs propres.

Q6. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Soit v un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. D'après **Q4**, on a $g^2(v) = g(v) + 2v$ et en particulier la famille $(v, g(v), g^2(v))$ est liée, ça ne peut donc pas être une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $\boxed{g \text{ n'est pas cyclique}}$.

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Par exemple, on a $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.

Q7. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- *Linéarité* : Soient P, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X)\\ &= \lambda P(X+1)+Q(X+1)-\lambda P(X)-Q(X)\\ &= \lambda(P(X+1)-P(X))+Q(X+1)-Q(X)\\ &= \lambda\Delta(P)+\Delta(Q),\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\Delta \text{ est linéaire}}$.

- *Valeurs* : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, *i.e.* $\deg(P) \leqslant n$. Par propriétés des degrés, on a

$$\deg(\Delta(P)) \leqslant \max\Big(\deg(P(X+1)),\, \deg(P(X))\Big) \leqslant \max(n,n) = n,$$

et donc $\boxed{\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]}$.

- Par conséquent, $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Q8. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$. Calculer $\Delta(X^k)$ sous une forme développée. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}\Delta(X^k) &= (X+1)^k - X^k\\ &= \left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X^j 1^{k-j}\right) - X^k && \textit{binôme de Newton}\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j. && \textit{simplification terme } X^k\end{aligned}$$

En particulier $\Delta(X^k)$ est de $\boxed{\text{degré } k-1 \text{ et son coefficient dominant vaut } \binom{k}{k-1} = k}$.

Q9. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

Soit P un polynôme de degré $d \in \{1,\dots,n\}$. On écrit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ avec $a_d \neq 0$. Par linéarité, on a $\Delta(P) = a_0\Delta(1) + a_1\Delta(X) + \cdots + a_d\Delta(X^d)$. D'après la question précédente, le terme dominant de $\Delta(P)$ est $a_d dX^{d-1}$ (notons que $da_d \neq 0$) et en particulier $\boxed{\deg(\Delta(P)) = d-1 = \deg(P)-1}$.

Q10. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Considérons $v = X^n \in \mathbb{R}_n[X]$. En itérant le résultat de la question précédente, pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, on a $\deg(\Delta^i(v)) = n - i$. Ainsi la famille $(v, \Delta(v), \dots, \Delta^n(v))$ est échelonnée en degré donc libre. Comme elle contient $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Finalement, $\boxed{\Delta \text{ est cyclique}}$.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.

Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Q11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$.

Procédons par récurrence. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{P}(p)$: « $h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$ ».
Initialisation : Par linéarité de h, on a

$$h(v) = h(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 h(v_1) + \dots + \alpha_n h(v_n).$$

De plus, pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, v_k est un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ_k, *i.e.* $h(v_k) = \lambda_k v_k$. Par conséquent $h(v) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n$, *i.e.* $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. On a

$$\begin{aligned}
h^{p+1}(v) &= h(h^p(v)) \\
&\qquad \mathcal{P}(p) \\
&= h(\alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n) \\
&\qquad \textit{linéarité } h \\
&= \alpha_1 \lambda_1^p h(v_1) + \dots + \alpha_n \lambda_n^p h(v_n) \\
&\qquad v_k \ \overrightarrow{\mathrm{vp}} \ \textit{pour la vp } \lambda_k \\
&= \alpha_1 \lambda_1^{p+1} v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^{p+1} v_n,
\end{aligned}$$

i.e. $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
Conclusion : Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$.

Q12. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ dans la base $\mathcal{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

D'abord, d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les coordonnées de $h^p(v)$ dans la base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ sont $(\alpha_1 \lambda_1^p, \dots, \alpha_n \lambda_n^p)$. Alors

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \cdots & \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n & \cdots & \alpha_n \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&\qquad \textit{linéarité chaque colonne} \\
&= \alpha_1 \cdots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&\qquad \boxed{\textit{déterminant de Vandermonde}} \\
&= \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).
\end{aligned}$$

Q13. Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons h cyclique. Par définition, il existe $v \in E$ tel que la famille $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ est une base de E. En particulier, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$. D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$, *i.e.* les λ_k sont deux à deux distincts.
Ainsi $\boxed{h \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que h admette n valeurs propres distinctes. On a alors $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$. en prenant $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, c'est-à-dire $v = v_1 + \dots + v_n$, la question précédente donne $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$, ce qui signifie que $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ est une base de E et donc que $\boxed{h \text{ est cyclique}}$.